1 дәріс. Тақырыбы: Комплекс сандар. Комплекс санның алгебралық формасы. Комплекс сандарға амалдар қолдану.

Комплекс айнымалысының функциялары

1 Комплексті сандар

1.1 Алгебралық пішінде берілген комплекс сандарға амалдар қолдану

$z = x + iy$ түрінде берілген сан, алгебралық пішінде берілген комплекс сан деп аталады. Мұндағы x және y нақты сандар, ал $i = \sqrt{-1}$. x және y сандары сәйкесінше z комплекс санының нақты және жорамал бөліктері деп аталып $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ белгіленеді.

Комплекс сандардың нақты бөліктері мен нақты бөліктері, жорамал бөліктері мен жорамал бөліктері тең болса, онда комплекс сандар тең болады. Ал комплекс сандардың нақты бөліктері тең болып, жорамал бөліктерінің тек таңбалары қарама-қарсы болса, онда ондай комплекс сандар түйіндес комплекс сандар деп аталады. Егер z комплекс сан болса, онда оған түйіндес комплекс сан $\bar{z}$ арқылы белгіленеді.

Комплекс сандарға қолданылатын алгебралық амалдар келесі формулалар арқылы анықталады

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}. \qquad (1)$$

z комплекс санының $\operatorname{Re} z$ және $\operatorname{Im} z$ бөліктерін z және оның түйіндесі $\bar{z}$ арқылы келесі формулаларды өрнектеуге болады

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = i\frac{\bar{z} - z}{2} = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

1-мысал. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$ берілген. $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 табу керек.

Шешуі. $z_1 + z_2 = (1+3) + i(1-2) = 4 - i$,

$$z_1 - z_2 = (1-3) + i(1+2) = -2 + 3i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i)\cdot(3-2i) = (3+2) + i(-2+3) = 5 + i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.$$

2-мысал. $z = \dfrac{\sqrt{2}+i}{1-i\sqrt{2}}$ есептеп, $\operatorname{Re} z$ және $\operatorname{Im} z$ жазу керек.

Шешуі. $z = \dfrac{(\sqrt{2}+i)(1+i\sqrt{2})}{(1-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}+i+2i-\sqrt{2}}{1+2} = i$ бұдан $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$.

3-мысал. $(1+2i)x + (3-i)y = 4 + i$ теңдеуінің нақты түбірлерін табу керек.

Шешуі. Теңдеудің сол жағының нақты және жорамал бөліктерін бөліп аламыз: $(x+3y) + i(2x - y) = 4 + i$. Екі комплекс сандарының теңдігінен $\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$ Бұл жүйенің түбірі $x = 1$, $y = 1$.

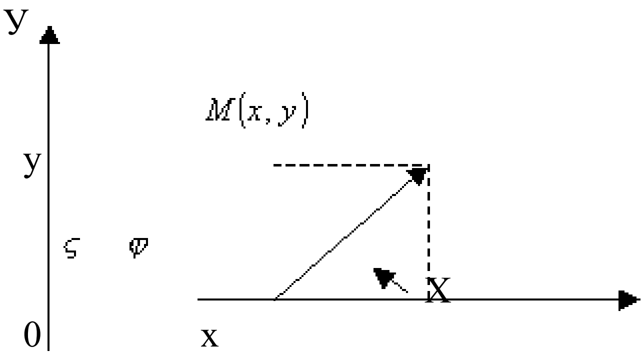
4-мысал. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ болатындығын көрсету керек.

Дәлелдеуі. Анықтамасы бойынша $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)} =$
$= \overline{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)} = (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

1. $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 5 - i$ берілген. $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 табу керек.
2. $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + \sqrt{3}i$ берілген. z_1 / z_2 есептеп оның нақты және жорамал бөліктерін табу керек.

1.2 Комплекс сандардың геометриялық кескіні және тригонометрия-лық, көрсеткіштік пішіндері

Кез келген $z = x + iy$ комплекс санын координатасы $(x,\ y)$ болатын ХОУ жазықтығының нүктесі немесе басы $O(0,0)$ нүктесі, ал соңы $M(x, y)$ нүктесі болатын вектор түрінде кескіндеуге болады. Сонда z санын осы нүктенің аффиксі деп, комплекс сандар жазықтығындағы абсциссалар осін нақты ось, ординаталар осін жорамал ось деп атайды.



1-сурет.

$\overline{OM}$ векторының ұзындығы ς, комплекс z санының модулі деп аталып, $|z|$ арқылы белгіленеді. Яғни $\varsigma = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\overline{OM}$ векторы мен ОХ өсінің (белінің) арасындағы бұрыш, φ арқылы белгіленіп, z комплекс санының аргументі деп аталады да $Arg\ z$ арқылы белгіленеді. Ол $2\pi k$ дәлдігімен табылады

$Arg\ z = \arg z + 2k\pi \qquad (k = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots)$, мұндағы $\arg z$ аргументтің бас мәні деп аталып, $-\pi < \arg z \le \pi$ аралығында анықталады

$$\arg z = \begin{cases} \arg tg \dfrac{y}{x}, & егер\ x > 0, \\ \pi + \arg tg \dfrac{y}{x}, & егер\ x < 0, y \ge 0, \\ -\pi + \arg tg \dfrac{y}{x}, & егер\ x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & егер\ x < 0, y < 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & егер\ x = 0, y < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Аргументтер үшін келесі ара қатынастар орындалады

$$tg(Arg\, z) = \frac{y}{x}, \qquad \sin(Arg\, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \cos(Arg\ z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1-суреттен декарттық системамен полярлық системаның арасындағы байланыс $x = \varsigma \cos \varphi, \quad y = \varsigma \sin \varphi$ формулалары арқылы анықталатындықтан $z = x + iy$ комплекс санын былайша жазуға болады

$$z = \varsigma(\cos \varphi + i \sin \varphi) \tag{3}$$

Бұл теңдіктің оң жағы комплекс санның тригонометриялық пішіні деп аталады.

Кез келген $z \neq 0$ комплекс санының көрсеткіштік пішіні $\varsigma \cdot e^{i\varphi}$,

мұндағы $\varsigma = |z|, \quad \varphi = Arg\ z$; (4)

түрінде жазылады.

5-мысал. $z = -1 - i\sqrt{3}$ комплекс санының тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндерін жазу керек.

Шешуі. $\varsigma = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2; \quad \varphi = -\pi + arg\ tg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$.

Сондықтан $-1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\ell^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

6-мысал. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ комплекс санының тригонометриялық және көрсеткіштік пішіндерін жазу керек.

Шешуі. $\varsigma = |z| = \sqrt{2+2} = 2$. $\quad \varphi = arg\ z = \pi + arc\ tg\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Демек, $-\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right] = 2\ell^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

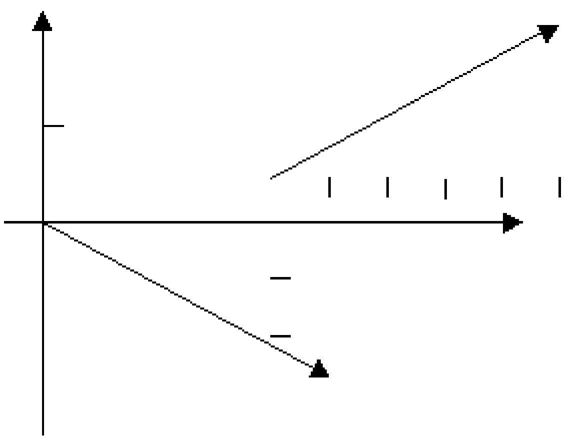
7 -мысал. $z = 5 + 3i$ және $\bar{z} = 5 - 3i$ сандарын комплекс жазықтығында кескіндеп, аргументтерін табу керек.

Шешуі.

2-суретте $z = 5 + 3i$ және $z = 5 - 3i$ кескінделген. Бұл мысалдан түйіндес сандарға комплекс жазықтығының нақты өсіне симметриялы орналасқан нүктелер сай келетіндігін көреміз.

Сондықтан $\arg z = arctg\frac{3}{5}$,

$\arg \bar{z} = -arctg\frac{3}{5}, \quad Arg\ z = arc\ tg\frac{3}{5} + 2\pi k$;



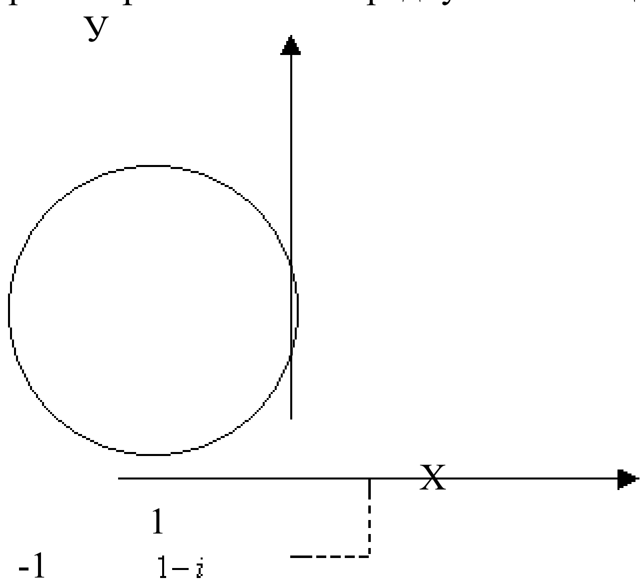
2-сурет.

8 -мысал. z_1, z_2 комплекс сандарының айырымының модулінің геометриялық мағынасын анықтау керек.

Шешуі. $|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + i(y_1 - y_2)^2}$ бұл z_1 және z_2 нүктелерінің арасындағы қашықтық.

9 -мысал. $|z - 1 + i| = 2$ теңдеуімен берілген сызықты анықтап оның графигін салу керек.

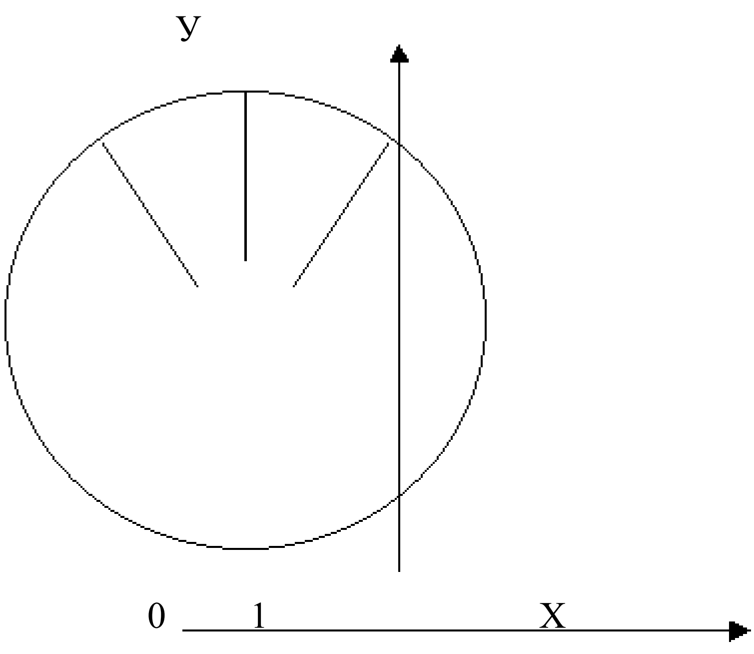
Шешуі. $|z_1 - z_2|$ -екі нүктенің арасындағы қашықтық болғандықтан $|z - 1 + i| = 2$ теңдеуімен берілген центрі 1-і нүктесі болатын радиусы 2-ге тең шеңбер шығады.

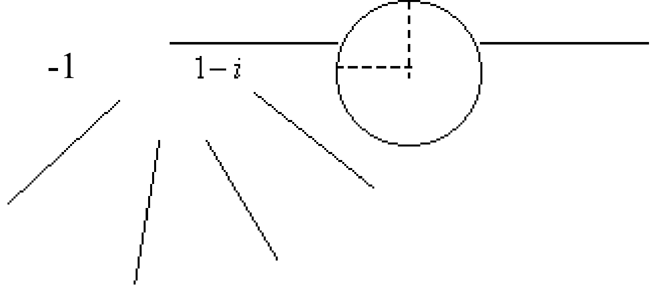


3-сурет

10-мысал. $1 \le |z - 1 + i| < 3$ теңсіздіктерімен шенелген нүктелердің жиынын анықтау керек.

Шешуі. Іздеп отырған жиынымыз екі шартты бірдей қанағаттандыру керек: $1 \le |z - (1 - i)|$ және $|z - (1 - i)| < 3$. Бірінші теңсіздік центрі 1-і нүктесі болатын радиусы бірге тең дөңгелектің сырты болса, ал екінші теңсіздік центрі 1-і нүктесі болатын радиусы 3-ке тең дөңгелек болады. Сондықтан іздеп отырған жиынымыз центрлері 1-і нүктесі болатын радиустары іштен 1-мен, ал сыртынан 3-пен шенелген дөңгелек болады (4-сурет).





4-сурет

11-мысал. $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ теңсіздіктерімен шенелген нүктелер жиынын анықтау керек.

Шешуі. Аргумент $-\frac{\pi}{4}$ пен $\frac{\pi}{2}$-ң арасында мән қабылдайтындықтан іздеп отырған бұрышымыз: $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ және $\varphi = \frac{\pi}{3}$ сәулелерінің арасында жатады. Сәулелердің өзі бұл жиынның құрамына кірмейді.